

مراجعة

المرحلة الأعدادية - 8.

ط (الأعداد الطبيعية) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
 $\mathbb{N} = \mathbb{N}^+ \cup \mathbb{N}^-$ (العدد الصحيح) $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 $\mathbb{N} \neq \emptyset, \mathbb{N} \ni 0, 1, 2, \dots$ (العدد النسبي) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}$

ن (العدد الحقيقي) $\mathbb{R}$ ليس $\frac{p}{q}$ مثال $\frac{22}{7} \approx \pi$
 ج (العدد المركب) $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$
 العدد الزوجي $\mathbb{E} = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$
 العدد الفردى $\mathbb{O} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
 العدد الأولى $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$

• $(u+p)^c = (u+p)^c \pm (u+p)^c$ الأول والثاني $\pm$ (الثاني) $\pm$
 • $(u+p)^c = (u+p)^c \pm (u+p)^c$ (الثاني) $\pm$

خلى باللى
 $+$ $=$ $+$ x $+$
 $+$ $=$ $-$ x $-$
 $-$ $=$ $+$ x $-$
 $-$ $=$ $-$ x $+$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$
 $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$
 $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• $(u+p)^c (u+p)^c = (u+p)^{2c}$

• الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$

• الوسيط ترتيب وناخذ اللي في النص ولوزوجي يبقى الوقيين

اللي في النص

• المنوال القيمة الأكثر انتشاراً

$$L(P) = \frac{\text{عدد الحد}}{\text{عدد قضاة اللجنة}} = \frac{(P)N}{(F)N}$$

$${}^N P = {}^N P \div {}^M P \quad {}^N + {}^M P = {}^N P \times {}^M P$$

$$\left(\frac{P}{N} \right) = \frac{{}^N P}{N!} \quad \left(\frac{P}{N} \right) = \frac{{}^N P}{N!} \quad \left(\frac{P}{N} \right) = \frac{{}^N P}{N!}$$

$${}^N P = \frac{N!}{(N-P)!}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P}$$

$$P \cup X P = P (X \cup P)$$

$$\frac{P}{P} = P \left(\frac{P}{P} \right)$$

$$P \neq P \leftarrow 1 = P$$

$$P \neq P \leftarrow N = P \leftarrow 1 = P$$

$$P \neq P \leftarrow N = P \leftarrow 1 = P$$

$$P \neq P \leftarrow N = P \leftarrow 1 = P$$

ترتيب العمليات الحسابية ① اللي داخل القوس أولاً

② الأس

③ $L \times L \div L + L - L$ واللي جبر كدا هو كذا

$$L \pm L \leftarrow L \pm L$$

$$|P| = P$$

$$P \neq P \leftarrow P \neq P$$

$$P = P$$

$\Rightarrow P_E - \frac{P}{\gamma} = C + u + s + p$

P حاصل سطح س، u حاصل سطح ن، ج ۱ حد الخطر P

$M_{at} = h$ مجموع الجذريه

$\frac{M_{at}}{P} = \frac{h}{P}$ حاصل ضرب الجذريه

١٤-٢. $\left. \begin{array}{l} \text{الجنرات حَصِيَّان مختلفاه} \\ \text{الجنرات حَصِيَّان متساوياه} \\ \text{الجنرات غير حَصِيَّات (مركب)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} < \\ = \\ > \end{array}$

$$\frac{r+j}{rj} = \frac{1}{r} + \frac{1}{j}$$

① نخل الدوال کی برابری محدود مجالاً کیلئے

$\hookrightarrow v + u - \varepsilon + u - \gamma = (u) \quad b \geq u \quad \text{با } \delta$

٥) مجال الكسر = ج - ع أصغر المقام ع

$$\sum_{i=1}^n x_i - 2 \cdot \frac{5}{5-5} = (5) \cdot 2$$

③ اوجی $\bigcirc$ $\hookleftarrow$ (د-س) = ۳-۵ : س-۳ ک.

② فردی $\sqrt{\text{المجاليان}} \Leftarrow d = (a+b)^3 = 0 + 5^3 = 125 \Leftarrow E$

متوازی الاضلاع

• كل شيء في العالم

متساوی ہے۔ $u.p. = u.s.$

$\therefore u = sp$

● كل ضالعين حَقًا بلين

حوالہ

د. ۵ // د. ۶

٥. كل زاوية حقايلية

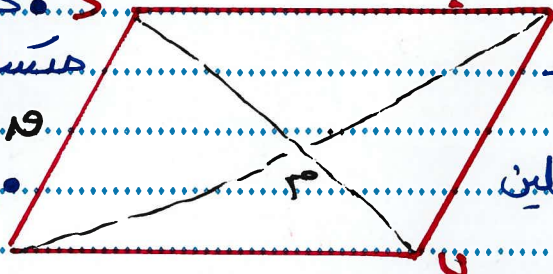
جواب: $19 = 19 = 19$

 ~~$u > v = s > v$~~

• لفظ ان بیضی کی ہے

۲۲. $\vec{r} = r\hat{r}$ و $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\psi_p = \psi_s$


$$\bullet \text{ In } \dots = 0 > 19 + 0 > 19 \quad \bullet \text{ In } \dots = 0 > 19 + 19 > 19 \bullet$$
$$\dots \ln = p \supset q + s \supset q \cdot \ln = s \supset q + \neg p \supset q \dots$$

نفس الخواصه دي موجوده في المعين، المربع، المستطيل

وکیل و احادیث حاجہ زیادہ

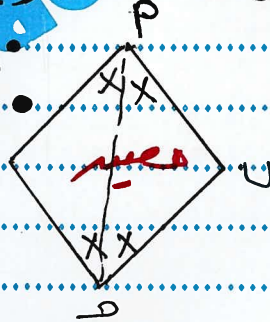
• زوایاہ تساوی ۹۰°

• الفطران حسب الأمان

الفطران يصفاه ز اوبه لرأس

عدد الأعضاء متساوية

٥. القرآن متكاملاً



ché

• لا يخاف فيه

وَمِنْ بَيِّنَاتِ حَاجَةِ

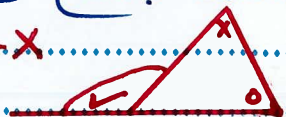
لكن خذ كل حاجة.

هر ربع

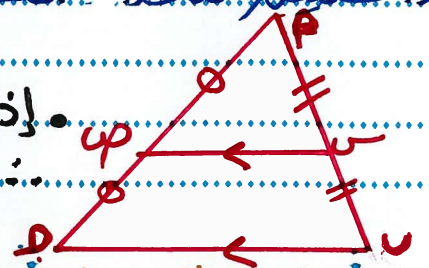
• مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية = 180°

• مجموع ضلالت زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

• **فَيَا أَيُّهَا الزَّوَّاجُ الْخَارِجُ عَنِ الْمَثَلِ نَسَاوِي مَجْمُوعِ فَيَا أَيُّهَا الزَّوَّاجُ الْخَارِجُ عَنِ الْمَثَلِ نَسَاوِي مَجْمُوعِ فَيَا أَيُّهَا الزَّوَّاجُ الْخَارِجُ عَنِ الْمَثَلِ نَسَاوِي مَجْمُوعِ**

$$\checkmark = 0 + X$$


• إذا كانت $\vec{r}$ من منتصف OP ، $\vec{r}$ من منتصف OP

$$\omega \neq \frac{1}{c} = 4\pi c \quad \overline{50} // \overline{40}$$


بالانقلاب في محور السينات $(u - 1, u)$

محور الصادات $(u, 1 - u)$

حول نقطة الأصل $(-1, -u)$

بالانتقال $(1, 1)$ $(u + 1, u + 1)$

بالدوران $(90^\circ, 1)$ $(u, 1 - u)$

بالدوران $(270^\circ, 1)$ $(u, -1 - u)$

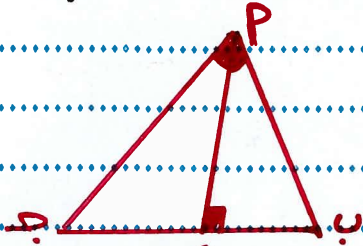
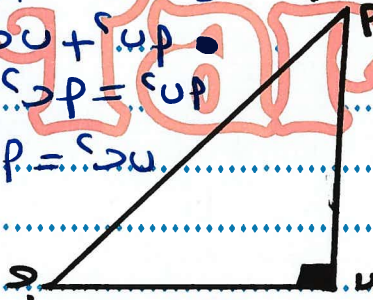
بالدوران $(180^\circ, 1)$ $(-1 - u, -u)$

بالدوران $(360^\circ, 1)$ (u, u)

$$\angle P = \angle U + \angle Q$$

$$\angle U - \angle P = \angle Q$$

$$\angle U - \angle P = \angle Q$$



$$\angle U \times \angle U = \angle P$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle U \times \angle U = \angle P$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

$$\angle P \times \angle U = \angle Q$$

الزاوية متساوية
حقيقة وليست في الحقيقة

الزاوية متساوية
متساوية متساوية

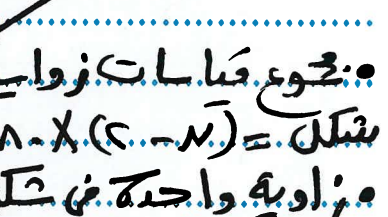
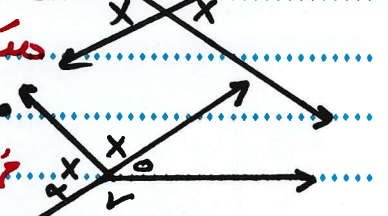
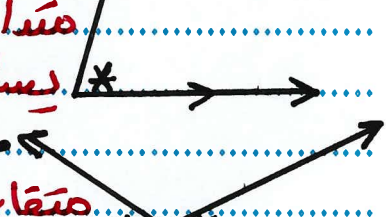
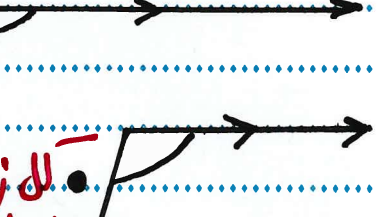
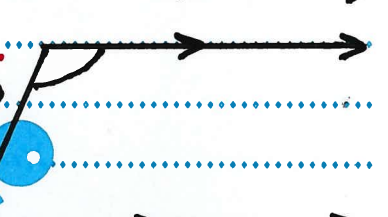
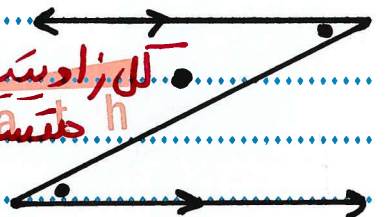
الزاوية متساوية
متساوية متساوية

الزاوية متساوية
متساوية متساوية

الزاوية متساوية
متساوية متساوية

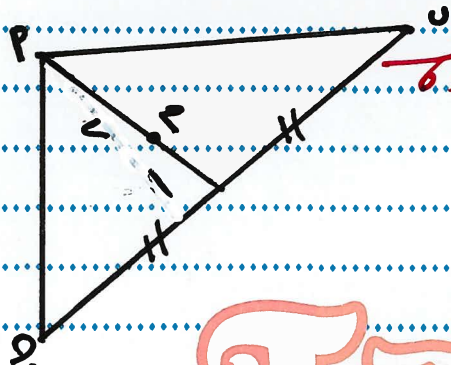
الزاوية متساوية
متساوية متساوية

الزاوية متساوية
متساوية متساوية



- مجموع قياس الزاويتين المتتامتين = 90°
- مجموع قياس الزاويتين المتكاملتين = 180°

SP متوسط



نازل من الرأس إلى وسط القاعدة
لكل من ضلعين $\perp$ ولا ينصف الرأس
إلا لو كان متساوي الساقين أو الأضلاع

نقطة تلاقي المتوسطات

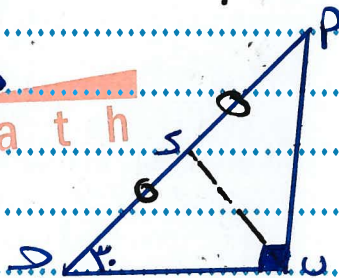
تقسم بالنسبة 2 إلى 1 من جهة الرأس

Target

$$\frac{SP}{PS} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{SP}{PS} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{SP}{PS} = \frac{1}{2}$$

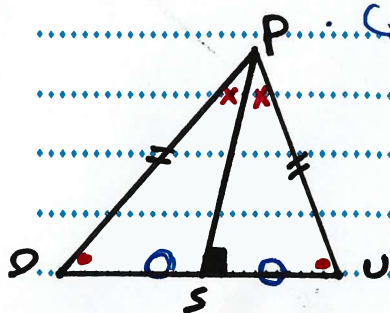


مجموع ضلعين في أي مثلث أكبر من الضلع الثالث

إذا كان $SP = PS$

إذا كان $SP \perp PS$: $SP > PS$ و $PS > SP$

$$SP = PS$$



ودفن الكلام في Δ متساوي الأضلاع

محدد المثلثين $\rightarrow$ متساوي



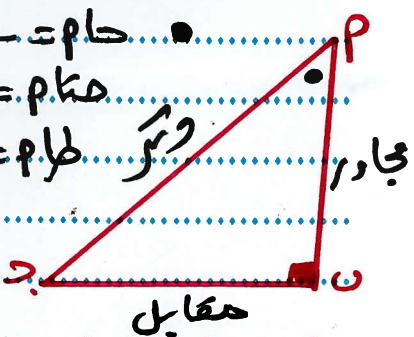
في أي مثلث الضلع الكبير يقابل الزاوية الكبيرة

في أي مثلث الضلع الصغير يقابل الزاوية الصغيرة

$$\frac{SP}{PS} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{SP}{PS} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{SP}{PS} = \frac{1}{2}$$



إذا كان $SP = PS$: $SP > PS$ و $PS > SP$

في الشكل المقابل

$$SP = PS$$

$$SP = PS$$

• إذا كان P (نقطة) (x, y) $u = (x_1, y_1)$ $v = (x_2, y_2)$ $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\frac{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)}{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1, y_1)}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{(x_2, y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

• جداولية نقطية على الخط P (نقطة) (x, y) $u = (x_1, y_1)$ $v = (x_2, y_2)$

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_2^2 + y_2^2}$$

الحل

• الزاوية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$u + v = w \Rightarrow \cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

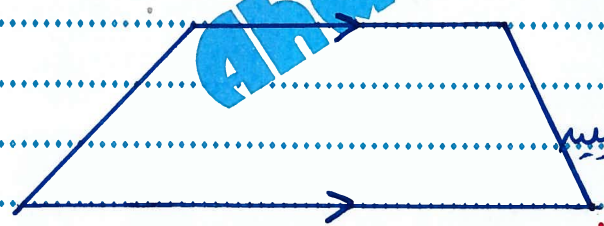
• $u \parallel v \Rightarrow \cos \theta = 1$
 $u \perp v \Rightarrow \cos \theta = 0$

• إثبات أن P (نقطة) $u + v = w$ على استقامة واحدة

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$$

أو $u + v = w \Rightarrow u = w - v$ (نقطة P يكون لها الاتجاه)

• إذا كان P أكبر ضلع Δ $u + v = w$ Δ قائم
 $u + v < w$ Δ منفرج
 $u + v > w$ Δ حاد



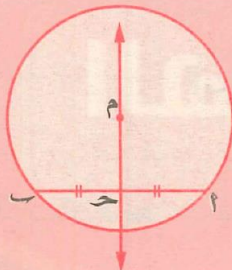
• شبه مفرق

كل ضلعين متوازيين وغير متساويين

لوعدي شبه منحرف متساوي الساقين
 يفتقر زاوية القاعدتين متساوية

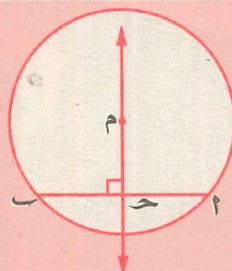
مراجعة سريعة لأهم النظريات والنتائج والقواعد فى الهندسة

إذا كان : $\overline{AB}$ وترًا فى الدائرة M
، H منتصف $\overline{AB}$
فإن : $\overrightarrow{MH} \perp \overline{AB}$



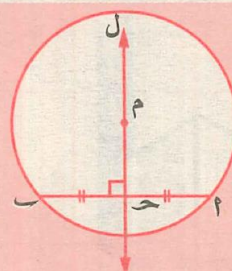
المستقيم المار بمركز الدائرة
وبمنتصف أى وتر (غير مار بالمركز)
فيها يكون عمودياً على هذا الوتر.

إذا كان : $\overline{AB}$ وترًا فى الدائرة M
، $\overrightarrow{MH} \perp \overline{AB}$ ، $H \in \overline{AB}$
فإن : H منتصف $\overline{AB}$



المستقيم المار بمركز الدائرة
عمودياً على أى وتر فيها ينصف
هذا الوتر.

إذا كان : $\overline{AB}$ وترًا فى الدائرة M
، H منتصف $\overline{AB}$ ، $L \perp \overline{AB}$ من
نقطة H فإن : $M \in$ المستقيم HL

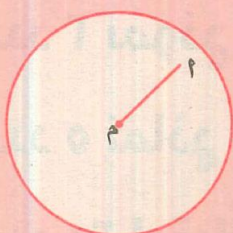


المستقيم العمودى على أى وتر
فى الدائرة من منتصفه يمر
بمركز هذه الدائرة.

موضع النقطة P بالنسبة للدائرة M

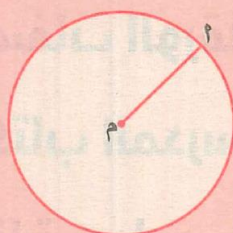
P تقع داخل الدائرة M

إذا كان : $PM < r$



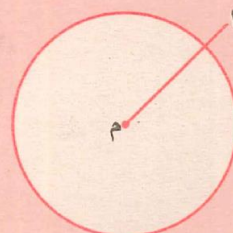
P تقع على الدائرة M

إذا كان : $PM = r$



P تقع خارج الدائرة M

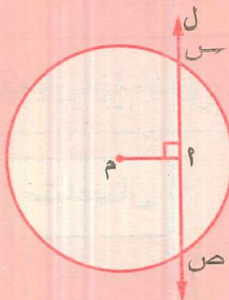
إذا كان : $PM > r$



موضع المستقيم l بالنسبة للدائرة $\mathcal{M}$ والذي يبعد عن مركزها مسافة ρ

l يقطع الدائرة $\mathcal{M}$

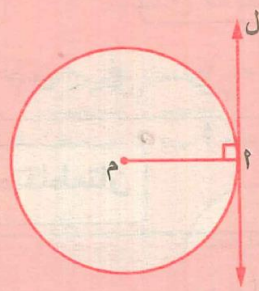
إذا كان : $\rho > \text{نق}$



- المستقيم $l \cap$ الدائرة $\mathcal{M}$
- $\{س، ص\} =$
- المستقيم $l \cap$ سطح الدائرة $\mathcal{M}$
- $\overline{سص} =$

l يمس الدائرة $\mathcal{M}$

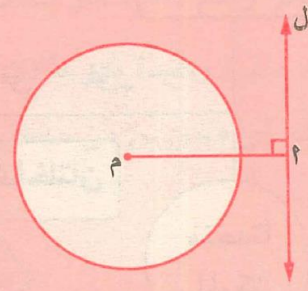
إذا كان : $\rho = \text{نق}$



- المستقيم $l \cap$ الدائرة $\mathcal{M} = \{س\}$
- المستقيم $l \cap$ سطح الدائرة $\mathcal{M}$
- $\{س\} =$

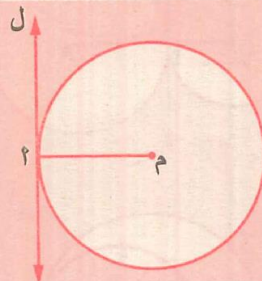
l يقع خارج الدائرة $\mathcal{M}$

إذا كان : $\rho < \text{نق}$



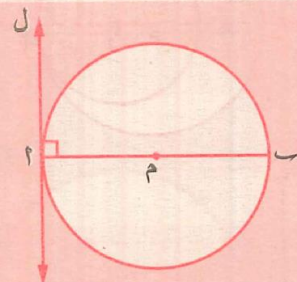
- المستقيم $l \cap$ الدائرة $\mathcal{M} = \emptyset$
- المستقيم $l \cap$ سطح الدائرة $\mathcal{M}$
- $\emptyset =$

إذا كان : l مماسًا للدائرة عند ρ
فإن : $\overline{\rho م} \perp l$



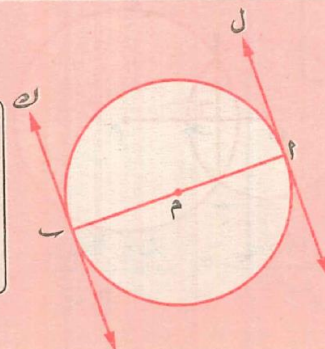
المماس للدائرة يكون عموديًا
على نصف القطر المرسوم
من نقطة التماس.

إذا كان : $\overline{\rho م}$ قطرًا في الدائرة $\mathcal{M}$
، $l \perp \overline{\rho م}$ من نقطة ρ
فإن : l مماس للدائرة $\mathcal{M}$ عند ρ



المستقيم العمودي على قطر
الدائرة من إحدى نهايتيه
يكون مماسًا لها.

إذا كان : $\overline{\rho م}$ قطرًا في الدائرة $\mathcal{M}$
، l ، $ل$ مماسين لها عند ρ ، $ب$
فإن : $ل // ل$

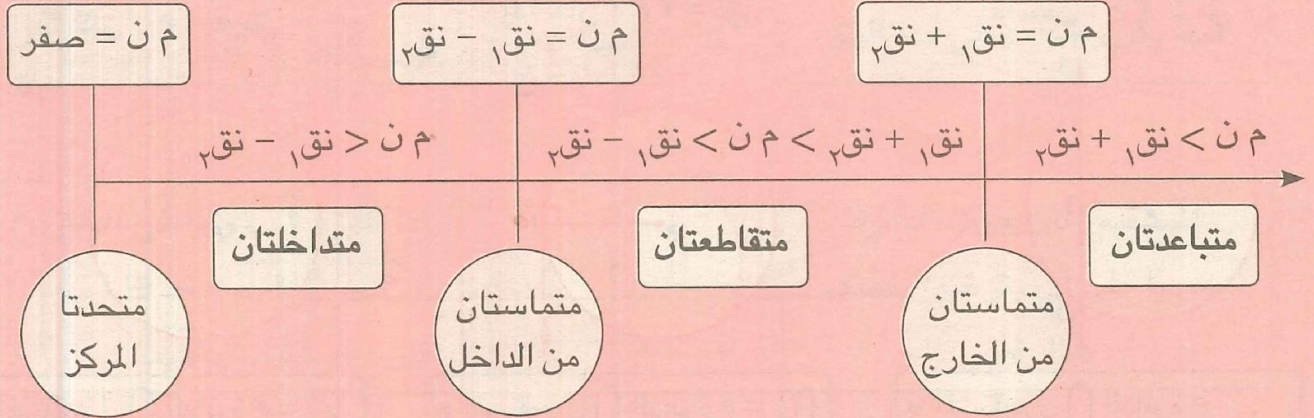


المماسان لدائرة المرسومان
من نهايتي قطر فيها يكونان
متوازيين.

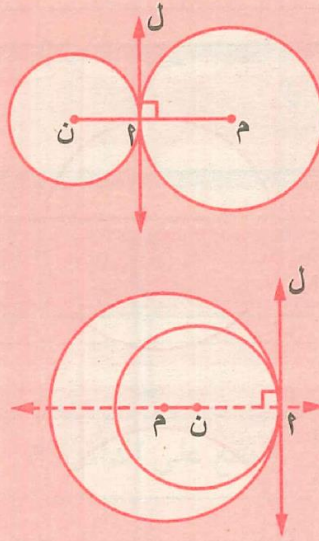
موضع الدائرة م بالنسبة للدائرة ن

لتحديد موضع الدائرة م (طول نصف قطرها $نق_1$) بالنسبة للدائرة ن (طول نصف قطرها $نق_2$)

، نوجد : $نق_1 - نق_2$ ، $نق_1 + نق_2$ ثم نستخدم المخطط التالي لتحديد الموضع. (حيث $نق_1 < نق_2$)

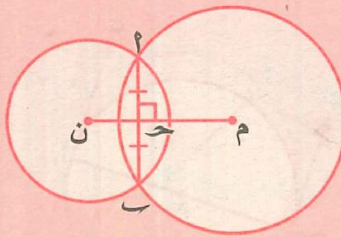


إذا كانت : الدائرتان م ، ن
متماستين عند نقطة ٢ ، ل مماساً
مشاركاً لهما عند ٢
فإن : $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{ل}$ المستقيم ل



خط المركزين لدائرتين
متماستين يمر بنقطة التماس
، ويكون عمودياً على المماس
المشارك عند هذه النقطة.

إذا كانت : م ، ن دائرتين
متقاطعتين في ٢ ، ب
فإن : $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$ ، $أ ب = ب ح$
($\overleftrightarrow{م ن}$ محور تماثل $\overleftrightarrow{أ ب}$)



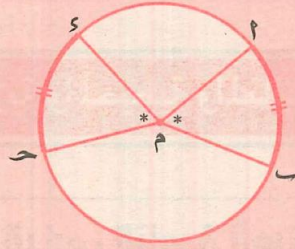
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين
يكون عمودياً على الوتر المشترك
وينصفه.

ملاحظات على تعيين الدائرة

- يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة معلومة.
- يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين مثل ٢ ، ٣ ومراكز هذه الدوائر تقع جميعها على محور $\overline{٢٣}$
- أصغر دائرة تمر بالنقطتين ٢ ، ٣ هي الدائرة التي تكون $\overline{٢٣}$ قطرًا فيها ومركزها هو منتصف $\overline{٢٣}$ وطول نصف قطرها $= \frac{١}{٢} \overline{٢٣}$
- لا يمكن رسم دائرة تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة.
- توجد دائرة وحيدة تمر بثلاث نقط ٢ ، ٣ ، ٤ ليست على استقامة واحدة ومركز هذه الدائرة هو نقطة تقاطع أي محورين من محاور القطع المستقيمة $\overline{٢٣}$ ، $\overline{٣٤}$ ، $\overline{٢٤}$

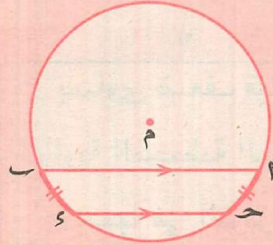
تساوي الأقواس في القياس والطول

إذا كان : $\widehat{٢٣} = \widehat{٣٤}$ $\widehat{٣٤} = \widehat{٢٣}$ $\widehat{٢٣} = \widehat{٣٤}$
فإن : طول $\widehat{٢٣}$ = طول $\widehat{٣٤}$
، والعكس صحيح.



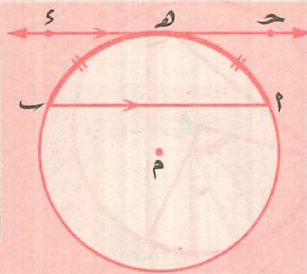
في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول ، والعكس صحيح.

إذا كان : $\overline{٢٣} \parallel \overline{٣٤}$
فإن : $\widehat{٢٣} = \widehat{٣٤}$ $\widehat{٣٤} = \widehat{٢٣}$



الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس.

إذا كان : $\overline{٢٣} \parallel \overline{٣٤}$
فإن : $\widehat{٢٣} = \widehat{٣٤}$ $\widehat{٣٤} = \widehat{٢٣}$



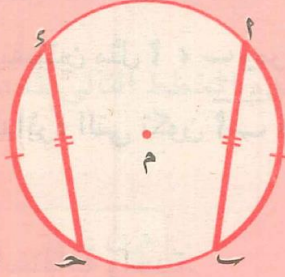
القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس.

لاحظ أن :

$$\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠^\circ} = \frac{\text{طول القوس}}{٢\pi \text{ نق}}$$

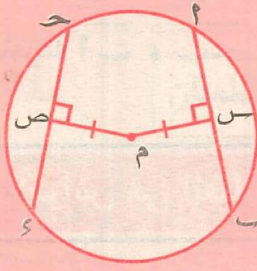
تساوى وترين فى الطول

إذا كان : $\widehat{AB} = \widehat{CD}$
فإن : $AB = CD$
، والعكس صحيح.



فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول ، والعكس صحيح.

إذا كان : $AB = CD$
، $AM \perp BC$ ، $DM \perp EF$
فإن : $AM = DM$
، والعكس صحيح.

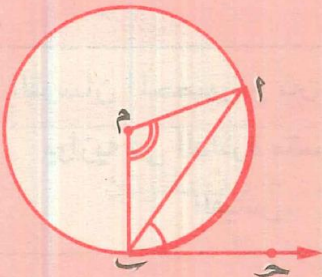


فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأوتار المتساوية فى الطول على أبعاد متساوية من مركزها ، والعكس صحيح.

الزوايا المركزية والمحيطية والمماسية والعلاقات بينهم

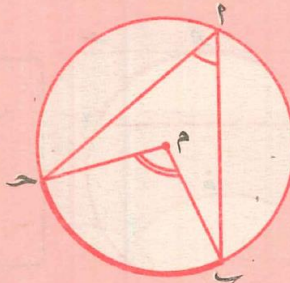
قياس الزاوية المركزية

يساوى ضعف قياس
الزاوية المماسية المشتركة
معها فى القوس.



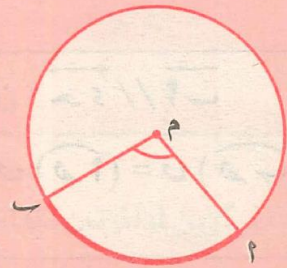
$$\angle AOB = 2 \angle C$$

يساوى ضعف قياس
الزاوية المحيطية المشتركة
معها فى القوس.



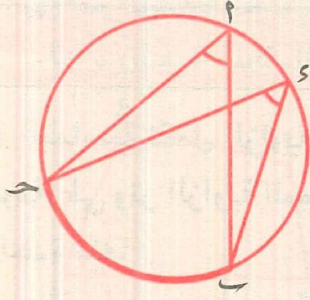
$$\angle AOB = 2 \angle C$$

يساوى قياس القوس
المقابل لها.



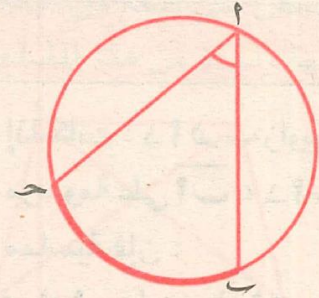
$$\angle AOB = \widehat{AB}$$

يساوى قياس الزاوية المحيطية
المشتركة معها فى القوس.



$$\angle (P) = \angle (S)$$

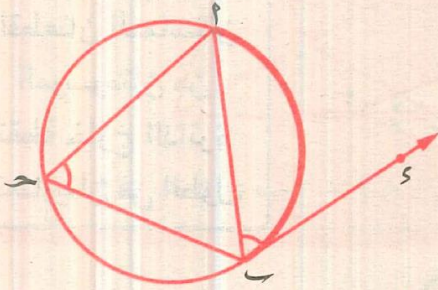
يساوى نصف قياس القوس
المقابل لها.



$$\angle (P) = \frac{1}{2} \text{ arc } (S)$$

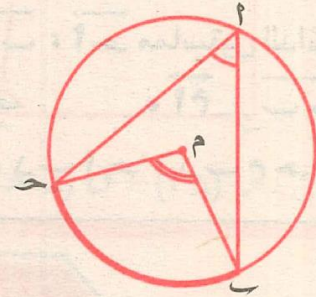
قياس الزاوية المحيطية

يساوى قياس الزاوية المماسية
المشتركة معها فى القوس.



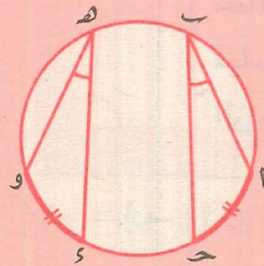
$$\angle (P) = \angle (S)$$

يساوى نصف قياس الزاوية
المركزية المشتركة معها فى القوس.



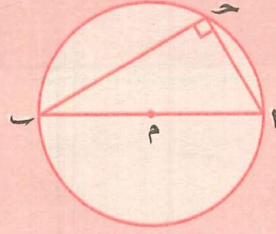
$$\angle (P) = \frac{1}{2} \angle (M)$$

إذا كان : $\angle (P) = \angle (S)$
فإن : $\angle (P) = \angle (S)$
، والعكس صحيح.



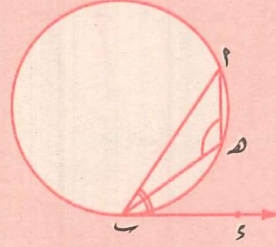
فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر)
الزوايا المحيطية التى تحصر أقواساً
متساوية فى القياس تكون متساوية فى
القياس ، والعكس صحيح.

الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة.



إذا كان $\overline{AB}$ قطرًا
فإن : $\angle C = 90^\circ$

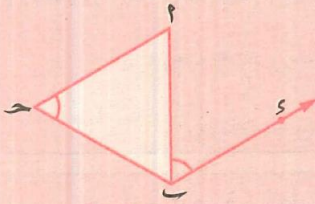
الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه.



إذا كانت : $\angle C$ زاوية محيطية
مرسومة على $\overline{AB}$ ،
مماسية فإن :
 $\angle C + \angle D = 180^\circ$

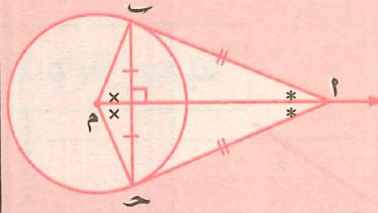
لاحظ أنه :

لإثبات أن $\overleftrightarrow{CD}$ مماس للدائرة المارة برؤوس $\triangle ABC$
نثبت أن : $\angle C = \angle D$



العلاقة بين المماسات في الدائرة

إذا كانت : $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ مماسيتين للدائرة م فإن :
 $\angle A = \angle C$.
 $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CM}$ وينصفه
 $\overleftrightarrow{AM}$ ينصف $\overline{BC}$ ، $\overline{DM} = \overline{CM}$

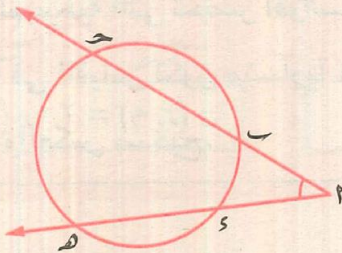


القطعتان المماستان
المرسومتان من
نقطة خارج الدائرة
متساويتان في الطول.

تمارين مشهورة

تمرين مشهور (٢)

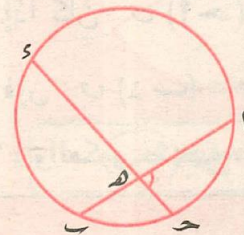
إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها ، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.



$$\angle A = \frac{1}{2} [\text{قوس } (BCE) - \text{قوس } (BDE)]$$

تمرين مشهور (١)

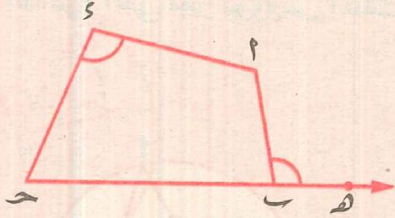
إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة ، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها.



$$\angle AEC = \frac{1}{2} [\text{قوس } (AC) + \text{قوس } (BD)]$$

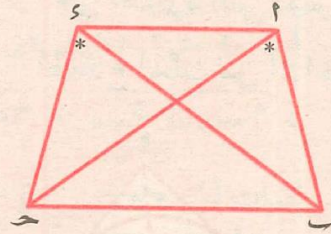
الشكل الرباعي الدائري

إذا وُجدت زاوية خارجية عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعي قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.



إذا كان : $\angle (د س) = \angle (د ف هـ)$

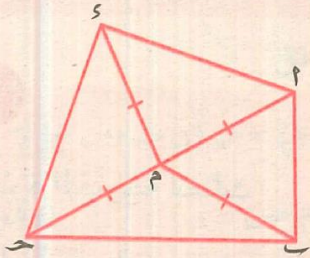
إذا وُجدت زاويتان متساويتان فى القياس ومرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة وفى جهة واحدة من هذا الضلع.



إذا كان : $\angle (د ف ح) = \angle (د س ح)$

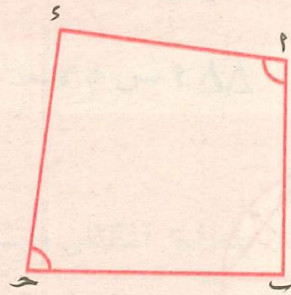
متى يكون الشكل الرباعي دائرياً

إذا وُجدت نقطة فى مستوى الشكل الرباعي تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه.



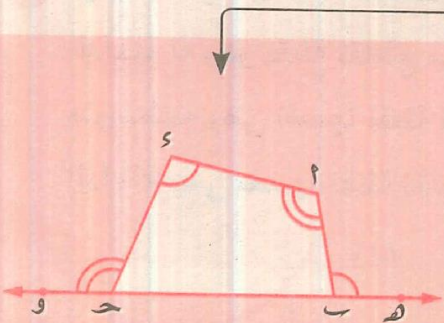
إذا كان : $س م = ف م = هـ م = ح م$

إذا وُجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان.



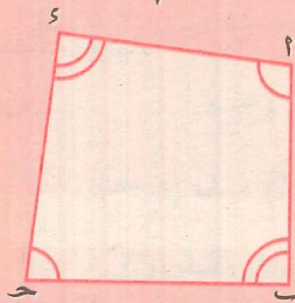
إذا كان : $\angle (د ح) + \angle (د س) = 180^\circ$

خواص الشكل الرباعي الدائري



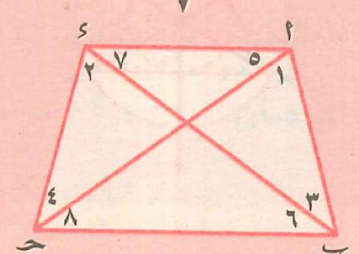
$$\angle (د س) = \angle (د ف هـ)$$

$$\angle (د ف) = \angle (د س ح)$$



$$\angle (د ح) + \angle (د س) = 180^\circ$$

$$\angle (د س) + \angle (د ف) = 180^\circ$$



$$\angle (د س) = \angle (د ف)$$

$$\angle (د ف) = \angle (د س)$$

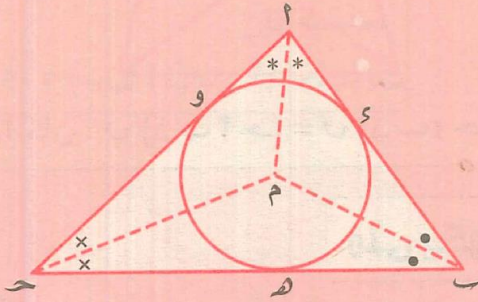
$$\angle (د هـ) = \angle (د ح)$$

$$\angle (د ح) = \angle (د هـ)$$

الدائرة الخارجة والداخلة للمثلث

الدائرة الداخلة للمثلث

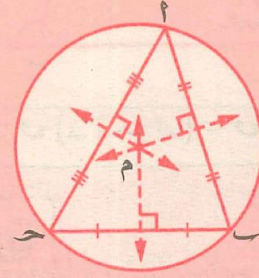
هي الدائرة التي تماس
أضلاع المثلث من الداخل



ومركزها هو نقطة تقاطع
منصفات زواياها الداخلة

الدائرة الخارجة للمثلث

هي الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

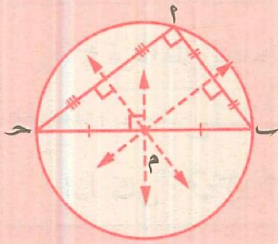


ومركزها هو نقطة تقاطع الأعمدة المقامة
على أضلاع المثلث من منتصفاتها

لاحظ أن :

١ مركز الدائرة الخارجة للمثلث

القائم الزاوية يقع في
منتصف الوتر.



٢ مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع هو نفسه مركز الدائرة

الداخلة له وهو نقطة تقاطع محاور أضلاعه وهي نفسها نقطة تقاطع
متوسطاته وهي نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه
الداخلة وهي نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

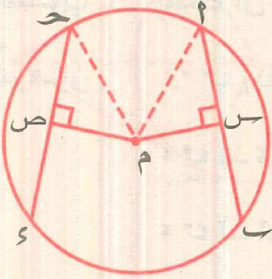


٣ يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من المستطيل والمربع وشبه المنحرف المتساوي الساقين بينما لا يمكن رسم
دائرة تمر برؤوس متوازي الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير المتساوي الساقين.

إثبات النظريات الهامة

نظرية ١

الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.



المعطيات $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ وتران في دائرة M حيث $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{ME} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{MF} \perp \overline{CD}$

المطلوب إثبات أن : $ME = MF$

العمل نرسم $\overline{MA}$ ، $\overline{MC}$

البرهان $\therefore \overline{ME} \perp \overline{AB}$

، $\therefore \overline{MF} \perp \overline{CD}$

، $\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$ (معطى) $\therefore ME = MF$

$\overline{ME} = \overline{MF}$ (برهاناً)

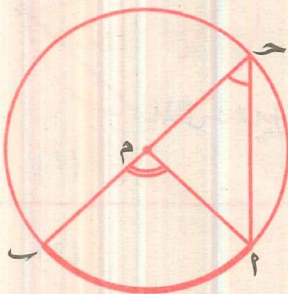
$\therefore \triangle MAE \cong \triangle MCF$ ، $ME = MF$ فيهما : $\therefore \overline{MA} = \overline{MC}$ (نق)

$\therefore \angle MAE = \angle MCF$ (زاوية متبادلة) $\therefore \angle MAE = \angle MCF$

$\therefore$ يتطابق المثلثان وينتج من تطابقهما أن : $ME = MF$ (وهو المطلوب)

نظرية ٢

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.



المعطيات في الدائرة M : $\angle AOB$ محيطية ، $\angle ACB$ مركزية

المطلوب إثبات أن : $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

البرهان $\therefore \angle ACB$ خارجة عن $\triangle AOB$

$\therefore \angle ACB = \angle AOB + \angle BAC$

، $\therefore \angle ACB = \angle AOB + \angle BAC$ (طولا نصفى قطرين)

$\therefore \angle ACB = \angle AOB$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

(وهو المطلوب)

نظرية ٣

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس.



المعطيات: د ح ، د ع ، د ه زوايا محيطية مشتركة في ق

المطلوب

إثبات أن: $\angle C = \angle E = \angle H$ (د ه)

البرهان

$$\therefore \angle C = \angle H = \frac{1}{2} \text{ ق (د ح)}$$

$$\angle C = \angle E = \frac{1}{2} \text{ ق (د ح)}$$

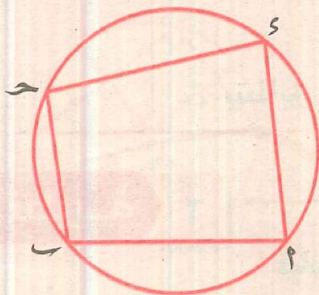
$$\angle C = \angle H = \frac{1}{2} \text{ ق (د ح)}$$

$$\therefore \angle C = \angle E = \angle H$$

(وهو المطلوب)

نظرية ٤

إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.



المعطيات: أ ب ح د شكل رباعي دائري.

المطلوب

إثبات أن: ١) $\angle A + \angle C = 180^\circ$

٢) $\angle B + \angle D = 180^\circ$

البرهان

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \text{ ق (ب د)} ، \angle C = \frac{1}{2} \text{ ق (أ ب)}$$

$$\therefore \angle A + \angle C = \frac{1}{2} [\text{ق (ب د)} + \text{ق (أ ب)}] = \frac{1}{2} \text{ قياس الدائرة}$$

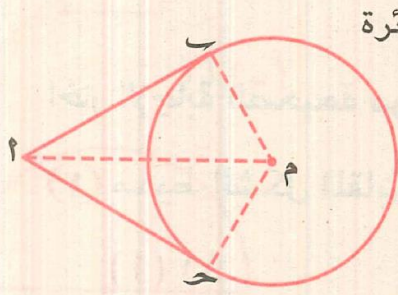
$$= 180^\circ = 360^\circ \times \frac{1}{2}$$

$$\text{بالمثل: } \angle B + \angle D = 180^\circ$$

(وهو المطلوب)

نظرية ٥

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان في الطول.



٢ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ح}$ قطعتان مماستان للدائرة

عند ب ، ح على الترتيب.

إثبات أن : $\overline{أ ب} = \overline{أ ح}$

نرسم $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ح}$ ، $\overline{أ م}$

$\therefore \overline{أ ب}$ مماس للدائرة م

، $\therefore \overline{أ ح}$ مماس للدائرة م

$\therefore \triangle م ب أ \cong \triangle م ح أ$ ، $\overline{أ ب} = \overline{أ ح}$ فيهما :

$\left. \begin{array}{l} \overline{م ب} = \overline{م ح} \text{ (طولاً نصفى قطرين فى الدائرة)} \\ \overline{أ م} \text{ (ضلع مشترك)} \end{array} \right\}$

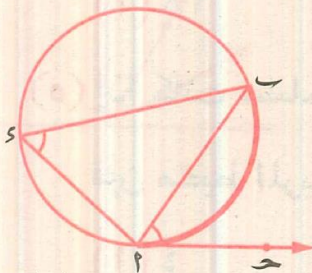
$\therefore \angle م ب أ = \angle م ح أ \text{ (إثباتاً)}$

(وهو المطلوب)

$\therefore \triangle م ب أ \cong \triangle م ح أ$ وينتج أن : $\overline{أ ب} = \overline{أ ح}$

نظرية ٦

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.



د ب أ زاوية مماسية ، د ح أ زاوية محيطية.

إثبات أن : $\angle د ب أ = \angle د ح أ$

$\therefore \angle د ب أ$ زاوية مماسية.

$\therefore \angle د ب أ = \frac{1}{2} \angle د ح أ$

، $\therefore \angle د ح أ$ زاوية محيطية.

$\therefore \angle د ح أ = \frac{1}{2} \angle د ب أ$

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\angle د ب أ = \angle د ح أ$

(وهو المطلوب)